

LEÇON N° 191 : EXEMPLES D'UTILISATION DES TECHNIQUES D'ALGÈBRE EN GÉOMÉTRIE.

I/ Utilisation de l'algèbre linéaire en géométrie.

A/ Déterminant : interprétation du volume. [OBJ] [G] [ROM] [FGNAlg3]

Théorème 1 : Déterminant et mesure de Lebesgue.

Application 2 : Volume parallélépipède.

Application 3 : Inégalité de Hadamard et interprétation géométrique.

Application 4 : Volume d'un ellipsoïde et ellipsoïde de John-Loewner.

Définition 5 : Matrice de Gram.

Proposition 6 : Toute matrice hermitienne définie positive est une matrice de Gram. Réciproque vraie.

Théorème 7 : Distance à un sev.

Proposition 8 : Orientation d'un espace euclidien : relation d'équivalence.

Définition 9 : Se donner une orientation = se donner une classe d'équivalence.

Proposition 10 : u isométrie positive si et seulement si transforme BON en BON avec même orientation.

Application 11 : La symétrie centrale par rapport à l'origine est négative car transforme une BON directe en BON indirecte.

B/ Une application sur l'approche d'isobarycentre. [G]

Définition 12 : Isobarycentre de complexes.

Lemme 13 : Déterminant circulant.

Application 14 : Suite de polygones + annexe.

C/ Utilisation du résultant en géométrie. [SP]

Définition 15 : Résultant dans un anneau intègre.

Proposition 16 : Propriétés de calcul.

Proposition 17 : Dans le corps de fractions $P \wedge Q = 1 \iff \text{Res}(P, Q) \neq 0$.

Lemme 18 : Lemme de spécialisation.

Théorème 19 : Dans \mathbb{K} algébriquement clos alors si le résultant est nul on peut remonter à une solution globale d'un système polynomial

Application 20 : Méthode d'élimination des variables pour un système donné.

Application 21 : Autre système (ex intersection sphère et plan) + annexe.

Application 22 : Paramétrisation rationnelle du cercle.

II/ Utilisation de la théorie des groupes en géométrie.

A/ Action de groupe. [PER]

Définition 23 : Action.

Définition 24 : Orbites et stabilisateur.

Remarque 25 : Les actions ont un lien fort avec la géométrie : on peut agir sur une structure géométrique.

Définition 26 : Action fidèle.

Application 27 : Théorème de Cayley.

Théorème 28 : Équation aux classes.

Théorème 29 : Formule de Burnside.

Application 30 : Coloration des colliers + annexe.

B/ Application aux isométries laissant stable des polytopes. [CAL]

Définition 31 : $I_S(X)$ et $I_S^+(X)$.

Proposition 32 : Le groupe diédral D_{2n} est le groupe des isométries du polygone régulier à n côtés.

Proposition 33 : Isométries du triangle équilatéral + annexe.

Développement 1

Théorème 34 : Isométries du cube + annexe.

Application 35 : Colorations du cube.

Proposition 36 : Isométries du tétraèdre régulier.

III/ Utilisation de la théorie des corps en géométrie.

A/ Premières propriétés. [CAR]

Définition 37 : Nombres constructibles.

Proposition 38 : Perpendiculaire, parallèle, milieu, médiane, bissectrice + annexe.

B/ Lien avec la théorie des corps. [CAR]

Théorème 39 : L'ensemble \mathcal{C} des nombres constructibles est un sous-corps de \mathbb{R} stable par racine carrée.

Lemme 40 : Équations cartésiennes pour droites et cercles.

Développement 2.a)

Théorème 41 : Théorème de Wantzel.

Corollaire 42 : Résultat de Wantzel.

C/ Réponse aux trois problèmes historiques. [CAR]

Corollaire 43 : La quadrature du cercle est impossible.

Développement 2.b)

Corollaire 44 : La duplication du cube est impossible.

Corollaire 45 : La trisection de l'angle est impossible en général.

Références :

- [PER] Perrin Algèbre p. 13
- [G] Gourdon Algèbre p. 146 et p. 263
- [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 563
- [FGNAlg3] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 229
- [SP] Saux-Picart Cours de calcul formel tome 1 p. 143-150
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 184
- [CAR] Carréga Théorie des corps p. 13-37
- [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 363